

10. cvičení - teorie

Definice. Necht' f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- derivace funkce f v bodě a je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- derivace funkce f v bodě a zleva je $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- derivace funkce f v bodě a zprava je $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Tabulka s derivacemi (odkaz).

Věta 3.19 (Aritmetika derivací). Necht' $a \in \mathbb{R}$ a necht' f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a . Necht' existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a , pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3.20 (O derivaci složené funkce). Necht' f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3.27. Necht' reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Věta 3.26 (l'Hospitalovo pravidlo). Necht' funkce f, g mají na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Necht' platí jedna z následujících podmínek:

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$.

Potom existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je rovna $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka. Pomocí správné úpravy lze l'Hospital použít na případy $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ apod.

Např.

$$\infty - \infty \leftarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \rightarrow \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Algoritmus podle Kristýny Kuncové:

- 1) Určíme **definiční obor** funkce f . Na této množině pak budeme hledat derivaci.
- 2) Zderivujeme mechanicky tam, kde to lze (musí jít o otevřené intervaly).
- 3) Prokontrolujeme podmínky derivování, kraje definičních oborů, zlomky, místa, kde se láme předpis... a identifikujeme problémové body.
- 4) Částí podezřelí: $\arcsin t$, $\arccos t$, $\operatorname{sgn} t$, $|t|$, $\max$ a $\min$, odmocniny, funkce definované „vidličkou“.
- 5) V daných bodech najdeme derivaci z definice nebo z věty ???. Neexistuje-li derivace, zkusíme najít alespoň jednostranné derivace.
- 6) Uděláme závěr.